

Elektrotehnika (2016. godina)

I grupa

Teorijska pitanja:

P1. Definirati potencijal tačke u elektrostatičkom polju [1] Navedi osnovne uslove elektrostatičke ravnoteže provodnog tela [1]. Generalisani Gausov zakon, iskaz i zapis [2]. Izvesti izraze za raspodelu vektora \mathbf{D} unutar i oko metalne sfere poluprečnika R naelektrisanu količinom naelektrisanja Q u vakuumu [2].

P2. Izvesti izraz za kapacitivnost koaksijalnog kondenzatora sa vazдушnim dielektrikom, poluprečnika elektroda a i b [2]. Gotova formula

se ne boduje! Šta je polarizacija dielektrika [1]? Kako se definiše vektor \mathbf{P} [1]?

P3. Definirati stacionarno strujno polje [1]. Jednačina kontinuiteta za stacionarno strujno polje [1]. Omov zakon u lokalnom i integralnom obliku [2].

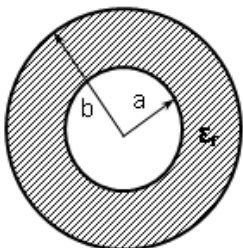
P4. Džulov zakon, iskaz i zapis [2]. U rednoj vezi snage otpornika R_1 i R_2 odnose se kao 5:1. Kakav će biti odnos snaga kada se ovi otpornici povežu paralelno [2] (obrazložiti)?

Zadaci:

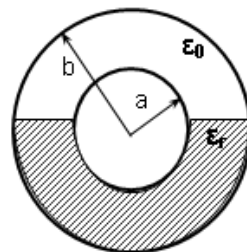
Z1. Dva jednaka nepokretna punktualna naelektrisanja Q_1 nalaze se u tačkama $A(-a,0)$ i $B(a,0)$ u vakuumu. Obavezno nacrtati sliku, rešenje bez slike se ne boduje.

- a) Odrediti jačinu električnog polja [2] i potencijal [2] u centru koordinatnog sistema, u tački $O(0,0)$.
b) Iz tačke $C(b,0)$ pušteno je da iz mirovanja krene pokretno punktualno naelektrisanje Q_2 mase m . Odrediti njegovu trajektoriju [2] i brzinu [2] u beskonačnosti. Usvojiti da je potencijal beskonačno udaljenih tačaka ravan nuli.

Podaci: $Q_1=4Q_2=0.6$ [nC], $m=9$ [grama], $a=10$ [cm], $b=20$ [cm] i $\epsilon_0=10^{-9}/36\pi$ [F/m].



Z2. Sferni kondenzator (slika levo) u potpunosti je ispunjen tečnim, homogenim dielektrikom relativne permitivnosti ϵ_r . Odrediti kapacitivnost ovog kondenzatora [3]. Zatim je kroz rupicu na spoljašnjoj elektrodi iscurila polovina dielektrika (slika desno). Odrediti novu kapacitivnost ovog kondenzatora [5]. **Podaci:** $a=2$ [cm], $b=3$ [cm], $\epsilon_r=9$.



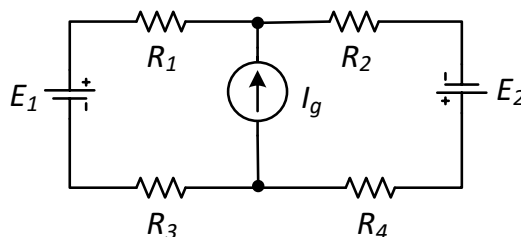
Z3. Napon praznog hoda nekog akumulatora je 14[V]. Nakon priključivanja potrošača otpornosti 6[Ω] napon na kontaktima akumulatora padne na 12[V]. Obavezno nacrtati šemu kola, rešenje bez šeme se ne boduje. Odrediti:

- a) unutrašnju otpornost ovog akumulatora [2],
b) snagu termičke disipacije na potrošaču [2],
c) snagu Džulovih gubitaka u akumulatoru [2],
d) ako se redno potrošaču veže još jedan isti takav potrošač, kolika je tada struja kroz kolo [2]?

Z4.) Za kolo sa šeme:

- (a) odrediti struje naponskih generatora [2],
(b) kolika je uložena snaga svakog od generatora [6]?

Podaci: $E_1=24$ [V], $E_2=12$ [V] $I_g = 8$ [mA], $R_1=5$ [kΩ], $R_2=2$ [kΩ], $R_3=1$ [kΩ] i $R_4=4$ [kΩ].



$$\mathbf{P2.} \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_S E \cdot dS = E \cdot 2\pi r l = \frac{Q' \cdot l}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0 r} \wedge \mathbf{E} = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{r}_0, \quad a \leq r \leq b,$$

$$U = V_1 - V_2 = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right), \quad C' = \frac{Q'}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

P4. $P_1 = I^2 R_1$, $P_2 = I^2 R_2$, $P_1/P_2 = 5:1$, sledi $R_1 = 5R_2$. U paralelnoj vezi napon je isti, pa je $P_1 = U^2/R_1$, a $P_2 = U^2/R_2$ pa je $P_1/P_2 = R_2/R_1 = 1/5$. Dakle **$P_1/P_2 = 1:5$** .

Z1.a) $\mathbf{E}(0,0)=0$ (zbog simetrije). Superpozicijom uz simetriju:

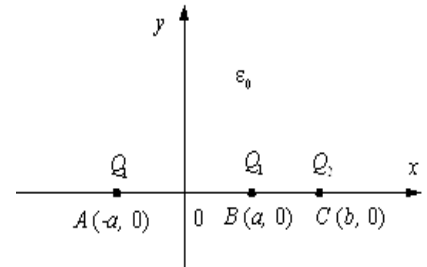
$$V(0,0) = V(Q_{1uA}) + V(Q_{1uB}) = 2 \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 a} = 108V.$$

$$\mathbf{b)} \Delta E_K = A_{nad Q_2}, \quad m \cdot v_\infty^2 / 2 - m \cdot v_C^2 / 2 = Q_2 (V_C - V_\infty), \quad v_C = 0, \quad V_\infty = 0.$$

$$V_C = V_C|_{Q_1 u A} + V_C|_{Q_1 u B}, \text{ gde su } V_C|_{Q_1 u A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{a+b}$$

$$V_C|_{Q_1 u B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{b-a} \Rightarrow V_C = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2b}{b^2 - a^2} = 72V. \text{ Konačno } m \cdot v_\infty^2 / 2 = Q_2 V_C, \text{ pa je}$$

$$v_\infty = \sqrt{\frac{Q_1 Q_2}{\pi\epsilon_0 m} \frac{b}{b^2 - a^2}} = \sqrt{\frac{2Q_2 V_C}{m}} = 1.55 \text{ mm/s}. \text{ Trajektorija je } x \text{ osa.}$$



$$\mathbf{Z2.} \text{ Prvobitna kapac. } C = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}{1/a - 1/b} = 4\pi\epsilon_0\epsilon_r \frac{ab}{b-a} = 4\pi \frac{10^{-9}}{36\pi} \cdot 9 \cdot \frac{2 \cdot 3}{3-2} 10^{-2} = 6 \cdot 10^{-11} F = 60 \text{ pF}$$

Primenom graničnih uslova sledi $E_0 = E_1 = E$. $D_0 = \epsilon_0 E$ u vazduhu i $D_1 = \epsilon_0 \epsilon_r E$ u dielektriku.

Generalisani Gausov zakon $\oint_S D dS = Q$ daje $D_0 \cdot 2\pi r^2 + D_1 \cdot 2\pi r^2 = Q$ tj. $2\pi r^2 \epsilon_0 \cdot E(1 + \epsilon_r) = Q$,

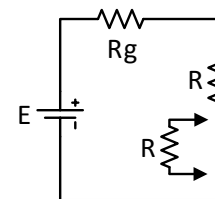
$$E(r) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0(1 + \epsilon_r)} \frac{1}{r^2}, \text{ napon}$$

$$U = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0(1 + \epsilon_r)} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0(1 + \epsilon_r)} \left(-\frac{1}{r}\right) \Big|_a^b = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0(1 + \epsilon_r)} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right).$$

$$\text{Nova kapac. je } C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0(1 + \epsilon_r)}{1/a - 1/b} = 2\pi\epsilon_0(1 + \epsilon_r) \frac{ab}{b-a} = 2\pi \frac{10^{-9}}{36\pi} \cdot (1+9) \cdot \frac{2 \cdot 3}{3-2} 10^{-2} = 33.33 \text{ pF}.$$

Z3. Ems akumulatora $E=14V$, $U=12V$ je napon na potrošaču od $R=6\Omega$, pa je struja kroz kolo $I=U/R=12/6=2A$. $U=E-R_g I$, pa je **$R_g=1\Omega$** . $P=RI^2=6 \cdot 2^2=24W=P$. $P_g=R_g I^2=1 \cdot 2^2=4W=P_g$.

Ukupno opterećenje baterije je sada $R_u=R+R=2R=12\Omega$, pa je struja $I=E/(R_g+R_u)=14/(1+12)=1.08A=I$.

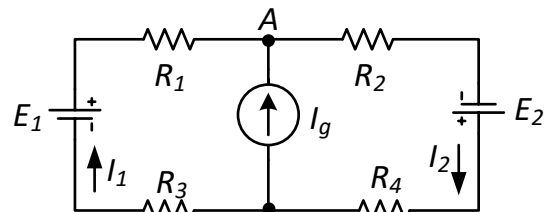


Z4. Metodom potencijala čvorova dobijamo:

$$\left(\frac{1}{R_1 + R_3} + \frac{1}{R_2 + R_4}\right) V_A = I_g + \frac{E_1}{R_1 + R_3} - \frac{E_2}{R_2 + R_4}$$

$$\left(\frac{10^{-3}}{5+1} + \frac{10^{-3}}{2+4}\right) V_A = 8 \cdot 10^{-3} + 24 \frac{10^{-3}}{5+1} - 12 \frac{10^{-3}}{2+4}$$

$$\frac{2}{6} V_A = \frac{60}{6} \Rightarrow V_A = 30[V].$$



Struja kroz E_1 je $I_1 = \frac{E_1 - V_A}{R_1 + R_3} = \frac{24 - 30}{6 \cdot 10^3} = -1[\text{mA}]$ sa usaglašenim smerom.

Struja kroz E_2 je $I_2 = \frac{V_A + E_2}{R_2 + R_4} = \frac{30 + 12}{6 \cdot 10^3} = 7[\text{mA}]$ sa usaglašenim smerom.

Napon na I_g je $U_g = V_A = 30[\text{V}]$ sa usaglašenim smerom.

$$P_{E1} = E_1 \cdot I_1 = 24 \cdot (-1[\text{mA}]) = -24[\text{mW}]$$

b) $P_{E2} = E_2 \cdot I_2 = 12 \cdot 7[\text{mA}] = 84[\text{mW}]$

$$P_{I_g} = I_g V_A = 8[\text{mA}] \cdot 30 = 240[\text{mW}]$$